

**Lehrplan für Bildungsgänge
die in zwei Jahren zur
Fachhochschulreife führen**

Mathematik

Schuljahr 1 und 2

**Lehrplan für nichtkaufmännische
zweijährige Bildungsgänge**

Vorbemerkungen

Mathematik ist Teil der Allgemeinbildung.

Mathematikunterricht soll den Schülerinnen und Schülern folgende Grunderfahrungen ermöglichen (Expertise zum Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe der BLK: Borneleit et. al., 2000; Winter: Mathematik und Allgemeinbildung, 1996):

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen können (Mathematik und Alltagserfahrungen),
- Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln als geistige Schöpfungen, als deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen lernen und begreifen können (innermathematisches Arbeiten),
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten erwerben können, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten).

Im Fach Mathematik werden die Schülerinnen und Schüler mit den Grundlagen der Analysis und mindestens einem weiteren Thema vertraut gemacht. Dabei stehen weniger die theoretischen Grundlagen im Vordergrund – vielmehr werden die mathematischen Inhalte vorwiegend anwendungsbezogen eingeführt und behandelt.

Ziel der einzelnen Lehrplaneinheiten ist es, die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, Mathematik anzuwenden und sie auf ein Studium vorzubereiten. Deshalb wurden in die Lehrplanarbeit auch Vertreterinnen und Vertreter von Fachhochschulen in beratender Funktion einbezogen.

Die Fähigkeit, in Zusammenhängen zu denken, reale Vorgänge zu modellieren, Techniken des Problemlösens zu beherrschen sowie Ergebnisse darzustellen und zu interpretieren, werden zunehmend bedeutsamer.

In das Zentrum des Unterrichts treten daher verstärkt mathematische Fähigkeiten wie

- logisches und sprachliches Erfassen mathematischer Sachverhalte,
- mathematisches Modellieren realitätsbezogener Fragen,
- Plausibilitätsbetrachtungen,
- Wahl geeigneter Lösungsmethoden und Darstellungsformen,
- Interpretieren und Beurteilen von Ergebnissen und ihrer sinnvollen Genauigkeit,
- Argumentieren, Dokumentieren und Präsentieren.

Der Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) ist eine notwendige Voraussetzung. Seine Verwendung soll die Konzentration auf das Wesentliche erleichtern, er steht aber nicht im Zentrum des Mathematikunterrichts. Weil Einschränkungen durch rechentechnische Hindernisse weitgehend entfallen, kann der Blick frei werden für die problemrelevanten mathematischen Fragestellungen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die in der Inhaltsspalte genannten Begriffe erläutern können. Sie können die Ideen beschreiben, die den verwendeten Rechenoperationen und Lösungsverfahren zugrunde liegen, und den Kalkül in einfachen Fällen ohne elektronische Hilfsmittel durchführen. Die Fertigkeit, aufwendige und komplexe Rechnungen von Hand durchzuführen, wird jedoch nicht verlangt.

Der Lehrplan legt keine chronologische Anforderung fest – vielmehr will er dazu anregen, thematische Schwerpunkte didaktisch miteinander zu verknüpfen. Die individuelle Gestaltung des Unterrichts soll sich an Leitideen orientieren, die in den Zeilen der folgenden Matrix dargestellt sind. Aus Zeitgründen wird es nicht möglich sein, im Unterricht alle Leitideen bei allen Inhalten zu behandeln, das heißt, die Matrix vollständig zu bearbeiten. Mathematische Inhalte und Methoden werden deshalb exemplarisch vertieft, sodass jede Zeile und jede Spalte der Matrix genügend oft besetzt wird, um die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, das Erlernete auf andere Fragestellungen zu übertragen.

Leitideen	Analysis							Vektor- geometrie		Wirtschaftl. Anwendungen		Stochastik		Mathematik in der Praxis	
	Funktionaler Zusammenhang, Schaubild einer Funktion	Globales und asymptotisches Verhalten, Symmetrie, Periodizität, Monotonie, Krümmungsverhalten	Durchschnittliche und momentane Änderungsrate, Steigung, Tangente	Integral als unendliche Summe	Ableitung, Stammfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	Optimierung	Flächenberechnung	Geometrische Objekte im Anschauungsraum	Länge und Winkel	Zweistufige Produktionsprozesse	Leontief-Modell	Wahrscheinlichkeitsbegriff	Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeits- verteilung	Kostentheorie	Grundlagen der Statistik, Normalverteilung
Berechnen näherungsweise mit GTR exakt ...															
Interpretieren von Ergebnissen von Schaubildern von Diagrammen von Fällen ...															
Argumentieren beschreiben begründen erklären ...															
Anwenden modellieren prüfen beurteilen ...															
Präsentieren schriftlich mündlich ...															

Lehrplanübersicht

Schuljahr	Lehrplaneinheiten	Zeitrichtwert	Gesamtstunden
1 und 2	Handlungsorientierte Themenbearbeitung (HOT)	30	
	1 Funktionen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen	50	
	2 Differential- und Integralrechnung	50	
	<i>Wahlthemen</i>		
	3 Vektorielle Geometrie	25*	
	4 Wirtschaftliche Anwendungen		
	5 Stochastik		
6 Mathematik in der Praxis			
7 Projekt	25	180	
	Zeit für Leistungsfeststellung und zur möglichen Vertiefung		60
			240

* Aus den Lehrplaneinheiten 3 bis 6 soll eine Einheit mit 25 Unterrichtsstunden ausgewählt werden.

Handlungsorientierte Themenbearbeitung (HOT)**30**

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten Themen handlungsorientiert.

Z. B.
Projekt,
Fallstudie,
Planspiel,
Rollenspiel

Die Themenauswahl hat aus den nachfolgenden Lehrplaneinheiten unter Beachtung Fächer verbindender Aspekte zu erfolgen.

1 Funktionen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen**50**

Im Mittelpunkt dieser Lehrplaneinheit stehen Funktionen, ihre Schaubilder und die zugehörigen Gleichungen. Als ein zentrales Element der Analysis wird der Funktionsbegriff eingeführt. Wichtige Eigenschaften von Funktionen und ihren Schaubildern werden bei Polynom-, Exponential- und trigonometrischen Funktionen untersucht. Dabei werden Anwendungsbezüge, z. B. aus Wirtschaft, Naturwissenschaft und Technik berücksichtigt. Die Schülerinnen und Schüler lösen Gleichungen, die im Zusammenhang mit diesen Funktionen auftreten. Bei der Lösung setzen sie an geeigneten Stellen rechnerunterstützte sowie exakte Lösungsmethoden ein.

Die Inhalte dieser Lehrplaneinheit werden anhand der folgenden Funktionstypen und deren Linearkombinationen behandelt.

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Polynomfunktionen

Exponentialfunktionen $f(x) = a e^{kx} + b$

Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = a \sin(kx) + b$$

$$f(x) = a \cos(kx) + b$$

Funktionen

Begriffsbildung und Beschreibung

Verbal, durch Schaubild, durch Tabelle, algebraisch

Schreibweise z. B.

$$f : x \mapsto e^x ; x \in \mathbb{R} \text{ oder } f \text{ mit } f(x) = e^x ; x \in \mathbb{R}$$

$$K : y = \sin(x) ; x \in [0; 2\pi]$$

Anwendungsbeispiele: Bewegungsgesetze, Wachstumsvorgänge, Kostenfunktionen

Das Schaubild der Funktion

- globales Verhalten
- gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen
- mit anderen Schaubildern
- Symmetrie zum Ursprung, zur y-Achse

Verwendung des GTR

Lage, Anzahl

Verschiebung und Streckung in x- und y-Richtung

Visualisierung mit dem GTR

Asymptotisches Verhalten

Auch z. B. bei f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}^*$

Periodizität

Durchschnittliche Änderungsrate

Sekantensteigung, $m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *Lösen von Gleichungen*

Näherungsweise

Grafisch, experimentell, iterativ, mit GTR

Exakt

- Äquivalenzumformungen
- Lösungsformel
- Faktorisieren

Wurzeln, Logarithmus

Anwendungsbeispiel: pH-Wert

Einfache Gleichungen z. B.

$$x^3 - 5x^2 = 0, \quad e^{2x} - 2e^x = 0$$

2 Differential- und Integralrechnung

50

Mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung gewinnen die Schülerinnen und Schüler vertiefte Kenntnisse über Funktionen und ihre Schaubilder. Die Ableitung an einer Stelle wird interpretiert sowohl als momentane Änderungsrate wie auch als Tangentensteigung. Die Schülerinnen und Schüler erkennen das Integral als unendliche Summe und erfahren den Zusammenhang zwischen Ableitungs- und Integralfunktion. Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion einerseits sowie ihrer Stammfunktion andererseits wird auch an Schaubildern verdeutlicht. Einen Einblick in die Anwendungen der Differential- und Integralrechnung erhalten die Schülerinnen und Schüler anhand von Optimierungsproblemen und Berechnungen von Flächeninhalten. Hierzu sind Beispiele aus Wirtschaft, Naturwissenschaften und Technik besonders sinnvoll.

Die Inhalte dieser Lehrplaneinheit werden anhand der folgenden Funktionstypen und deren Linearkombinationen behandelt.

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Polynomfunktionen

Exponentialfunktionen $f(x) = ae^{kx} + b$

Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = a \sin(kx) + b$$

$$f(x) = a \cos(kx) + b$$

Propädeutik des Grenzwertbegriffs

- Differenzen-, Differentialquotient, momentane Änderungsrate, Ableitung einer Stelle x_0

Tangentensteigung, $f'(x_0)$

- Integral als unendliche Summe

Ober-, Untersumme, Trapezregel, $\int_a^b f(x) dx$

Berechnung von Ableitungswerten und bestimmten Integralen auch mit GTR

Ableitungs- und Stammfunktionen

- Berechnung von Ableitungsfunktionen
- Ermittlung von Stammfunktionen
- Zusammenhang zwischen den Schaubildern von f, f', f''
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Interpretation für reale Vorgänge

Verbindung von Differential- und Integralrechnung

Auf den Beweis kann verzichtet werden

Schaubilder und ihre Eigenschaften

- Steigungs- und Krümmungsverhalten
- Tangenten und Normalen
- Bestimmung von Funktionstermen aus Eigenschaften ihrer Schaubilder LGS mit eindeutiger Lösung

Durch den Einsatz des GTR ist keine geschlossene Kurvendiskussion mehr erforderlich

Extrempunkte, Wendepunkte

Ansätze wie

$$f(x) = a x^3 + b x \text{ oder } f(x) = a + b \sin(2x)$$

Einsatz des GTR oder CAS

Anpassung von Kurven an Datenpunkte mit GTR

Anwendungsbeispiel: Kostentheorie

Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

- Optimierungsprobleme
- Berechnung von Flächeninhalten mit Hilfe der Stammfunktionen numerisch

Geometrische, physikalische, betriebswirtschaftlich Fragestellungen

Modellieren, Zielfunktion, Lösen, Bewerten

Auch mehrteilige Flächen, Flächen zwischen zwei Kurven

Mit GTR, experimentell

Wahlthemen

3 Vektorielle Geometrie**25**

Vektoren sind ein geeignetes Hilfsmittel zur Behandlung der Geometrie im Anschauungsraum. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten einfache geometrische Fragestellungen mit Hilfe der Vektorrechnung. Durch den Umgang mit geometrischen Objekten wird ihr räumliches Vorstellungsvermögen gefördert.

Folgende mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sind für die Behandlung dieser Lehrplaneinheit in erforderlichem Umfang und in der notwendigen Tiefe zu behandeln.

Addition und Subtraktion von Vektoren

S-Multiplikation

Skalarprodukt

Exemplarische Behandlung der Lösungsvielfalt von LGS

Wiederholung bekannter Verfahren aus der Sekundarstufe I

Geometrische Objekte im Anschauungsraum
 – Punkte und Vektoren
 – Geraden
 Lagebeziehungen und Schnittpunkte von Geraden
 Spurpunkte
 Senkrechte Projektion auf die Koordinatenebenen

Darstellung im dreidimensionalen Koordinatensystem als Schrägbild

Längen und Winkel
 – Betrag eines Vektors
 – Länge einer Strecke
 – Winkel zwischen zwei Vektoren
 – Winkel zwischen Geraden
 – Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken
 – einfache Berechnungen von Körpervolumen

Einheitsvektoren
 Mittelpunkt, Teilungspunkte

4 Wirtschaftliche Anwendungen

25

Viele Sachverhalte aus Betriebs- und Volkswirtschaftslehre lassen sich mit Matrizen und Vektoren beschreiben. Innerhalb der beiden ausgewählten Bereiche der wirtschaftswissenschaftlichen Anwendung erlernen die Schülerinnen und Schüler Grundkenntnisse der linearen Algebra, besonders die Kenntnis der Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (LGS) sowie die Kenntnis des Rechnens mit Matrizen. Die Schülerinnen und Schüler bewerten und interpretieren die Ergebnisse.

Folgende mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sind im Rahmen dieser Lehrpläneinheit in einem für die dort auftretenden Problemstellungen erforderlichen Umgang zu behandeln.

Matrizen und Vektoren

Matrizenoperationen

- Addition, S-Multiplikation, Matrizenmultiplikation
- Inversion mit GTR

Matrizengleichungen umformen

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Gauß-Algorithmus

Exemplarische Behandlung der Lösungsvielfalt

Zweistufige Produktionsprozesse

- Modellierung mit Bedarfstabellen
- Anwendung des Modells

Problemstellungen zu Produktionsmengen,
Bedarfmengen
Material-, Fertigungs-, Herstell- und Gesamtkosten
Erlös, Gewinn

Das Leontief-Modell

- Voraussetzungen
- Anwendung mit zwei bzw. drei Sektoren
- Interpretieren und Bewerten der Ergebnisse

Input-Output-Diagramm, Input-Output-Tabelle,
Input-Matrix, Technologiematrix

5 Stochastik

25

Viele Alltagserscheinungen lassen sich im Modell als Zufallsexperimente interpretieren. Die Schülerinnen und Schüler lernen zentrale Begriffe und Methoden kennen, um reale Zufallsexperimente zu simulieren. Die Schülerinnen und Schüler lernen die enge Verbindung zwischen relativer Häufigkeit und statistischer Wahrscheinlichkeit kennen. Sie erfahren dabei die Zusammenhänge zwischen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Eigenschaften.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente, Ereignisse
- absolute und relative Häufigkeiten
- statistische Wahrscheinlichkeit
- Laplace-Wahrscheinlichkeit

Auch mehrstufig
Baumdiagramm, Pfadregeln
Z. B. Münze, Würfel (ideal und nicht-ideal),
Urne

Gesetz der großen Zahlen

Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Merkmale und Zufallsvariable
- grafische Darstellungen
- Mittelwert und Erwartungswert

Auch unterschiedliche Klassenbreiten
Standardabweichungen
Anwendungsbeispiele: faire und nicht-faire
Gewinnspiele, Produktion mit Berücksichtigung
fehlerhafter Produkte

6 Mathematik in der Praxis

25

In vielen Lebensbereichen kommen Methoden der Mathematik zur Anwendung. In der Kostentheorie werden betriebswirtschaftliche Größen als funktionale Zusammenhänge beschrieben, analysiert und interpretiert. Die Schülerinnen und Schüler lernen, mit Fachbegriffen umzugehen, auftretende Fragestellungen grafisch und rechnerisch zu lösen und die Lösungen zu interpretieren. Statistiken sind in beinahe jeder Zeitungsausgabe zu finden. Die Schülerinnen und Schüler lernen unterschiedliche Möglichkeiten der Darstellung und Aufbereitung von Daten kennen. Dadurch schulen sie ihre Kritikfähigkeit gegenüber Statistiken

Kostentheorie

Dieses Themengebiet kann als Anwendung in die Analysis integriert und immer wieder aufgegriffen werden. Der GTR ist dabei ein effizientes Hilfsmittel

Gesamtkosten, Stückkosten und Erlös als Funktionen

S-förmiger Verlauf beim Ansatz der Kosten

$$K : x \mapsto K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Konstanter Preis bei vollständiger Konkurrenz
Preis $p_N(x)$ beim Monopolisten
Zusammensetzung der Gesamtkosten

Zusammenhänge zwischen diesen Funktionen

- kostentheoretische Fragestellungen
- Interpretation

Gewinnzone

Betriebsoptimum, Betriebsminimum
Cournotscher Punkt

Grundlagen der Statistik, Normalverteilung

Die Normalverteilung hat in der Praxis eine wichtige Bedeutung, deshalb wird sie in dieser Lehrplaneinheit exemplarisch behandelt. Der GTR ist dabei ein effizientes Hilfsmittel.

Merkmale und ihre Verteilungen

- Merkmalsarten und Merkmalskalen
- Häufigkeitsverteilungen und ihre Schaubilder
- Median, arithmetisches Mittel, Standardabweichungen

Qualitativ, quantitativ
Auch Klassenbildung

Normalverteilung als Anpassung stetiger Häufigkeitsverteilungen

Anwendungsbeispiele: Qualitätskontrolle, Messergebnisse naturwissenschaftlicher Größen, statistische Werte von Produktionsgrößen, Bevölkerungsstatistiken, versicherungsmathematische Daten

- Dichtefunktion der Normalverteilung
- kumulierte Normalverteilung

Berechnung mit GTR; Integral oder Tabelle

7 Projekt**25**

In einem Projekt lernen die Schülerinnen und Schüler ein weiteres mathematisches Thema kennen und erweitern so ihre Mathematikkenntnisse und runden sie ab.

Es können Themen aus dem Pflichtbereich vertieft, andere Themen, insbesondere mit beruflichen Anwendungsbezügen, aufgegriffen werden.

Mögliche Themen

Eines der nicht gewählten Wahlthemen aus den Lehrplaneinheiten 3 bis 6

Weitere Funktionsklassen

- gebrochen-rationale Funktionen
- Logarithmusfunktionen

Geschichte der Mathematik

Computeralgebrasysteme